Lycée
Saint-Exupéry
Marseille

Nom : ....

TS4
le 03/10/18

Devoir surveillé n°2

La calculatrice est autorisée. Le barème est indiqué à titre indicatif.

Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Tout échange verbal ou de matériel (sans l'accord du professeur) sera sanctionné. **Le sujet est à rendre avec la copie (même si vous n'avez rien écrit dessus).**

Exercice 1 [Etude de fonction]

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{4x+3}{x+2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ et on note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

1. ***a.*** Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
  b. Calculer les limites à gauche et à droite de -2.
  c. Que peut-on en déduire graphiquement

2. On admet que f est dérivable sur I
  a. Calculer l'expression de sa dérivée $f'(x)$
  b. En déduire les variations de f sur I.

3. Dans un repère, tracer l'allure de C_f et ses éventuelles asymptotes.

4. Etudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de la droite $D : y = 4$

5. On admet qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{C}_f$, T_1 et T_2 (en x_1 et x_2) de coefficient directeur valant 1 :
  a. Déterminer les valeurs de x_1 et x_2.
  b. En déduire les équations des tangentes T_1 et T_2. Les tracer sur la figure.

Exercice 2 [Polynômes et géométrie] On munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'équation :

$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0$$

ayant pour inconnue le nombre complexe z

1. Donner une solution entière de (E).

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z,

$$z^4 + 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

4. Les solutions de l'équation (E) sont les affixes de quatre points A,B,C,D du plan complexe tels que ABCD est un quadrilatère non croisé.
  a. Placer les points dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
  b. Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ? Justifier

Exercice 3 [Nombres Complexes]

Partie A - Question de cours

On rappelle que le conjugué d'un nombre complexe $z = x + iy$ se note et vaut $\overline{z} = x - iy$.
Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Démontrer que $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$

Partie B - Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z tel que :

$$z' = \frac{1 - z}{\bar{z} - 1}$$

Dans cette partie, on demandera de tracer les éléments de l'énoncé dans un repère orthonormé au fur et à mesure.

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + i$:

- ***a.*** Calculer l'affixe z'_C du point C' image de C par la transformation f et placer les points C et C' dans le repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- ***b.*** Montrer que les points A, C et C' sont alignés
- ***c.*** Soit D le symétrique de B par rapport à C'. Montrer que l'affixe de D est $\frac{-3+6i}{5}$

2.

- ***a.*** Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.
- ***b.*** En déduire l'alignement des points M, M' et A.

3. Déterminer et représenter sur la figure l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.